2. Funcions analítiques. Equacions característiques

Recordem breument les nocions més elementals de la teoría.

La variable complexa $w=u+iv$, és anomenada *funció de la variable* $z=x+iy$ si a cada valor de z pres en cert recinte G del pla z, correspòn un o diversos valors de w. Per tant, si es $w=f(z)$, és

$$u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y);$$

i recíprocament, tota combinació de dues funcions qualsevulga $\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$ és una funció de z. Es podría desenrotllar una teoría general de funcions des de aquest ampli punt de vista; però no tindría un interès especial per equivaler a la teoría de les funcions de dues variables reials.

$f(z)$ és anomenada *monogena* o *derivable* en el punt z_o. si $\frac{\Delta w_o}{\Delta z_o}$ té un límit únic quan $|\Delta z_o| \longrightarrow o$ independent de l'argument de Δz_o. S'anomena *analítica en un recinte* G, si és finita i monogena en tots els seus punts. *Analítica en un punt* z_o, quan ho és en un cert entorn (*) d'aquest punt (**).

Condició necessaria i suficient perquè w sigui analítica en el recinte G, és que u i v satisfacin en tot punt d'aquest recinte les equacions de Cauchy y Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(*) Entorn d'un punt és el sistema de punts situats en una àrea que té aquell punt interior. Generalment en lo que segueix se pendrà per tal àrea, la de un cercle de radi convenient.

(**) No basta que sigui monogena en el punt z_o. Aixi, per exemple, la funció $w=xy+iy^2$ és monogena en el punt $z=o$, peró no hi és analítica.

Aleshores té el símbol:

$$w' = f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

un significat únic en cada punt, i per tant subsisteixen les mateixes regles de derivació de les funcions reals (funció de funció, funció composta, suma, diferencia, producte i quocient, etc.).

3. Representació conforme en petit

Per ésser $f(z)$ continua i uniforme en un cert entorn del punt z_o, a tota curva c que passa per z_o correspón una curva c' que passa per w_o; de la definició de derivada resulta suposant $f'(z_o) \neq o$, :

$$\lim \arg \Delta w_o = \lim \arg \Delta z_o + \arg f'(z_o)$$

és a dir: si la tangent a la curva c en z_o forma l'angle α amb el semieix $+x$, la curva homòloga c' admet tangent en el punt w_o, y forma l'angle

$$\alpha' = \alpha + \arg f'(z_o);$$

els dos feixos de tangents homòlogues en z_o i w_o són, doncs, iguals i acordes; l'angle de gir és precisament $\arg f'(z_o)$.

Per tant, si $z_o\, z_1\, z_2$ i $w_o\, w_1\, w_2$ són dos ternes de punts homòlegs, ambdós triangles són sensiblement semblants si se'ls pren suficienment petits. D'aquí ve el nom de *representació conforme*.

Qualsevol que sigui $f'(z_o)$ és

$$\lim \frac{|\Delta w_o|}{|\Delta z_o|} = |f'(z_o)|$$

anomenarem aquest número $|f'(z_o)|$ que és el límit de la raó dels segments homòlegs, *dilatació* en el punt z_o.

Ara es planteja aquesta qüestió: els punts homòlegs del recinte G, en el qual està definida la funció analítica $f(z)$, ¿omplen sisquera un entorn del punt w_0 o tal vegada hi ha punts tan pròxims com se vulgui a w_0 que no tenen corresponent en el pla z? Aquesta qüestió essencial resol el següent

TEOREMA D'INVERSIÓ. *Si* $f(z)$ *és analítica en el punt* z_0 *(això és, analítica en un cert entorn* α de z_0*) i a més* $f'(z_0) \neq 0$, *es pot trobar un entorn* β' *del punt* w_0, *de modo que* $|w - w_0| < \mathrm{k}$, *i tal que a cada un dels seus punts correspongui un valor en* α. *La funció* $z = F(w)$ *així obtinguda en el recinte* β' *és analítica en ell i satisfà a:*

$$F'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

En efecte: pel teorema d'existencia de les funcions implícites (*), les equacions

$$u = \varphi(x, y) \qquad v = \psi(x, y)$$

defineixen en un cert entorn β' del punt (u_0, v_0) dues funcions de (x, y), uniformes, continues i diferenciables per ser son jacobià en dit punt:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 > 0$$

La funció $z = F(w)$ així definida en β' és analítica, ja que

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)}$$

(*) La seva demostració es pot veure, per exemple (amb aplicació a aquest cas especial) en nostre ***Resumen de las lecciones de Análisis matemático 2.° curso***, Victoriano Suárez, Madrid, 1916.

i per tant transforma l'entorn β' en un cert recinte β interior a α.

Resulta, doncs, que tota funció analítica $f(z)$ que compleix la condició $f'(z_0) \neq 0$, transforma biunívocamen t iconformement un cert entorn de z_0 en altre entorn de w_0. L'amplitut d'aquests entorns no es pot determinar *a priori*.

4. La integral de Cauchy i les seves aplicacions

Recordem finalment el teorema de Cauchy, conseqüencia immediata de la transformació de les integrals de área en integrals de contorn:

Si f(z) *és analítica en un recinte* G, *inclús en son contorn* C, *és:*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Amb aquest teorema es pot construir la major part de la Teoría de funcions analítiques. Deduirem en forma sistemàtica els resultats que hem d'utilitzar en aquestes conferencies.

I. *Si* f(z) *és continua en el recinte* G *inclús el seu contorn* C, *i és analítica en l'interior de* G, *el seu valor en cada punt interior és expressat per la integral de contorn presa en sentit positiu:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{t-z} \qquad [I]$$

L'únic punt en què la funció integrant no és analítica, és el $t=z$; traçant un entorn c de radi r, en el recinte anul·lar Cc la funció és analítica, i per tant:

$$\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \int_c \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0$$

Per als punts de la circumferencia c podem posar:

$$f(t)=f(z)+\delta;$$

i la igualtat es transforma així:

$$\int_C \frac{f(t)dt}{t-z}=f(z)\int_c \frac{dt}{t-z}+\int_c \frac{\delta dt}{t-z}$$

El primer sumand val $2\pi i f(z)$; per ésser f funció continua en el punt z, la diferencia $f(t)-f(z)=\delta$ pot ésser tan petita com se vulgui prenent r suficientment petita, i com que el primer membre és independent de r té d'ésser nula aquesta 2.ª integral.

II. *Si* f (z) *és analítica en* G *té derivades de tots els ordres, que també són analítiques en* G.

Puix derivant [I] sota el signe integral, resulta:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2},$$

i en general:

$$f^n(z)=\frac{\underline{|n}}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}$$

III. Es sabut que tot conjunt de números té un extrem superior M i un extrem inferior m; i que tota funció $f(x, y)$ continua en un recinte contornejat (i per tant finita) assoleix al menys en un punt son valor màxim M i en altre son valor mínim m (*).

El mòdul $|f(z)|$ d'una funció analítica en un recinte contornejat G és funció continua de (x, y); hi hà, doncs, al menys dos punts z_o, z, dins de G o en el contorn, tals que $|f(z_o)|=M$, $|f(z_o)|=m$. Per ésser analítica la funció es verifica:

Si s'exceptúa el cas en que f(z) *sigui una constant, tot punt* z_0 *en que* $|f(z)|$ *assoleix son valor màxim* M *és situat necessariament en el contorn.*

(*) Vegi's, per exemple, la nostra obra abans esmentada (pàg. 227).

Puix si en un punt interior és $|f(z_o)|=M$, i la funció no és constant, prenent un entorn seu de radi r, en un punt al menys d'aquesta circumferencia c (i per tant en un arc) serà $|f(z)|<M$, i essent

$$f(z_o)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(t)dt}{t-z_o},$$

$$|f(z_o)|<\frac{1}{2\pi}\int_c\frac{|f(t)|\,|dt|}{|t-z_o|}<\frac{1}{2\pi}\frac{M}{r}\int_c|dt|=M,$$

contra la hipòtesi $|f(z_o)|=M$.

IV. Si els valors de $f(z)$ en el contorn d'una circumferencia són $<K$, es dedueix també per a $f'(z_o)$ una altra limitació:

$$|f'(z_o)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int\frac{|f(t)|\,|dt|}{r^2}<\frac{K}{2\pi r^2}\int|dt|=\frac{K}{r}$$

D'on resulta aquest important teorema de Liouville: *Si una funció és analítica en tot el pla i s'hi conserva finita o sigui:* $|f(z)|<K$, *és* $f(z)=$*constant.*

Puix essent en qualsevol punt z_o del pla

$$|f'(z_o)|\leqq\frac{K}{r}$$

i verificant-se això per a tot valor de z per gran que sigui, té d'ésser $f'(z_o)=o$.

5. Desenrotllament en serie

I. *Si* $f(z)$ *és analítica en el recinte* G *i* a *és un punt interior, en tal punt interior de* G *es verifica:*

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+(z-a)^2\frac{f''(a)}{\lfloor 2}+\ldots+$$

$$+(z-a)^{n-1}\frac{f^{n-1}(a)}{\lfloor n-1}+(z-a)^n\cdot P_n(z)$$

essent $P_n(z)$ *una funció analítica que es pot expressar en la forma*

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)dt}{(t-a)^n\,(t-z)}$$

essent c *qualsevol circumferencia interior a* G *i de centre* a.

Tenim la identitat:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-a}+\frac{z-a}{(t-a)^2}+\ldots\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(t-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{(t-a)^n\,(t-z)}$$

multiplicant per $\frac{f(t)}{2\pi i}$ i integrant al llarg de c resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-a}dt+\frac{z-a}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)dt}{(t-a)^2}+\ldots\ldots+$$

$$+\frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)dt}{(t-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_c \frac{f'(t)}{(t-a)^n\,(t-z)}dt$$

fórmula que demostra el teorema, si es tenen en compte els resultats del § 4.

II. Per a tot punt z interior a c es verifica, essent r el radi de c,

$$\frac{|z-a|}{r}=l<1;$$

per altra part, anomenant d la distancia de z a la circumferencia c és $|t-z|\overline{\gtrless}d$; anomenant, doncs, M el màxim de $|f(t)|$,

$$|R_n(z)|\overline{\gtrless}\frac{|z-a|^n}{2\pi}\int_c \frac{|f(t)|\,|dt|}{|t-a|^n|t-z|}\overline{\gtrless}\frac{M}{2\pi d}l^n\int_c |dt|=\frac{Mrl^n}{d}$$

i com que $l^n\longrightarrow 0$ al créixer n indefinidament, resulta:

Tota funció f(z) *analítica en un recinte* G *es pot desenrotllar en tot punt interior* a *en serie de potencies:*

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+(z-a)^2\frac{f''(a)}{\underline{|2}}+\ldots\ldots$$

que convergeix i coincideix amb la funció en tot punt interior de qualsevol cercle de centre a *que estigui contingut dins del recinte.*

6. Teorema de Weierstrass

Es diu que una successió de funcions

$$f_1(z), \quad f_2(z) \;\ldots\ldots\; f_n(z), \;\ldots\ldots$$

convergeix uniformement cap a una funció $f(z)$ en un recinte G, si a cada número positiu ε es pot fer correspondre un valor $n = \nu$, tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ per a } n = \nu, \; \nu+1, \; \nu+2, \;\ldots\ldots$$

verificantse això en tots els punts z de G, sense modificar ν.

La successió d'integrals d'aquestes funcions al llarg de una curva tancada c continguda en G té per límit $\int_c f(t)dt$. En efecte: no més cal observar que fent variar z sobre c és $f_n(t)$ funció complexa d'una variable real única (per exemple, la longitut de l'arc) i descomposta en ses parts real i imaginaria, es pot aplicar el teorema de les funcions reals (*).

Amb aquestes breus nocions podem demostrar el següent teorema fonamental de Weierstrass:

Si la successió de funcions analítiques

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \;\ldots\ldots$$

convergeix uniformement en tot recinte parcial g *d'un recinte* G *cap a una funció* f(z), *aquesta és analítica en* G.

Sigui z un punt interior de G i prenem un recinte g de contorn c (per exemple un cercle) que contingui z en

(*) Aquest es pot veure en la nostra obra esmentada, (pàg. 180).

son interior. La successió

$$\frac{f_n(t)}{t-z} \qquad \left(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\right)$$

convergeix també uniformement en la curva c cap a la funció $\frac{f(t)}{t-z}$, ja que

$$\left|\frac{f_n(t)-f(t)}{t-z}\right| < \frac{1}{d}\left|f_n(t)-f(t)\right|$$

anomenant d la distancia de z a c; i per la convergencia uniforme de $f_n(z)$ en tot el g, aquesta fracció será $<\varepsilon$ des d'un valor de n independent de t. Per consegüent:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_n(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}dt$$

i pel teorema de Cauchy:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}dt$$

per tant el límit de $f_n(z)$ a causa d'ésser expressat per aquesta integral, és una funció analítica de z, i com que per hipòtesi aques límit és $f(z)$, aquesta funció és analítica en tot punt interior a G.

CONFERENCIA II